-EXERCICE 12.3-

• ENONCE :

« Oscillateur avec frottement solide »

• On considère un point matériel M, de masse m, mobile sur un support d'axe horizontal Ox ; ce point est rappelé vers O par une force de type élastique : $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$.

• Il est en outre soumis à une force de frottement **solide**, pour laquelle on note f le coefficient de frottement solide (statique ou dynamique).

• A l'instant initial, on abandonne M avec une **vitesse nulle** à l'abscisse x_0 ; on pose :

$$a = \frac{mgf}{k} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

1) A partir de quelle valeur de $|x_0|$, M se met-il en mouvement ?

2) on suppose que M peut se mettre en mouvement .
Montrer que l'on doit décomposer le mouvement en plusieurs phases et donner l'expression de $x(t) = x_1(t)$ correspondant à la première phase, avec $x_0 \succ 0$.

A quelle condition M repart-il du point d'abscisse x_{1m} où sa vitesse s'annule pour la première fois ?

3) On suppose que le mouvement se poursuit.
Calculer la pseudo-période du mouvement et la diminution d'amplitude correspondante.
Tracer la courbe $x(t)$.

4) Comparer la décroissance des oscillations à celle obtenue dans le cas d'un frottement fluide.

 Christian MAIRE

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D'ORAL

• **CORRIGE :** «Oscillateur avec frottement solide »

1) Notons $\vec{R}=\vec{N}+\vec{T}$ la réaction du support sur le point M, où $\vec{N}$ est la composante normale (verticale ici) de $\vec{R}$, et $\vec{T}$ sa composante tangentielle (horizontale) traduisant la présence de frottements ; il n'y a pas mouvement tant que : $\left|\vec{T}\right| \leq f\left|\vec{N}\right|$ (loi de Coulomb)

• En supposant qu'il n'y aura jamais de mouvement vertical, le PDF appliqué au point M, dans le référentiel lié au support, et projeté sur un axe vertical donne :

$N=\left|\vec{N}\right|=mg \Rightarrow$ pas de glissement horizontal tant que : $\left|\vec{T}\right| \leq fmg$.

• En l'absence de mouvement horizontal, le PFD projeté sur l'axe Ox fournit à t=0 :

$-kx_0+T=0$ (T est la **valeur algébrique** de $\vec{T}$) $\Rightarrow |T|=k|x_0| \Rightarrow$ la condition de non mouvement est $|x_0| \leq \dfrac{fmg}{k}=d \Rightarrow$ l'apparition d'un mouvement est conditionnée par : $\boxed{|x_0| \succ \dfrac{fmg}{k}=d}$

2) Le signe de la valeur algébrique T dépend du sens de la vitesse de M par rapport au support ; puisque c'est $|T|$ que l'on sait relier directement à fmg, l'équation différentielle prendra une expression différente selon le signe de la vitesse $\Rightarrow$ il faudra décomposer le mouvement en plusieurs phases.

• Puisque M se met en mouvement et que $x_0 \succ 0$, alors $x_0 \succ d$ et le mouvement va se faire selon les abscisses décroissantes $\Rightarrow$ la force T, de sens contraire à la vitesse, sera, dans un premier temps, **positive** ; le PFD permet alors d'écrire :

$$m\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}=-kx_1(t)+fmg \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x_1(t)}{dt^2}+\omega_0^2x_1(t)=\omega_0^2d} \qquad \text{avec : } \boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

• Il vient : $x_1(t)=d+A\cos\omega_0t+B\sin\omega_0t$; or : $x_1(0)=x_0$ et $\left.\dfrac{dx_1(t)}{dt}\right|_{t=0}=0 \Rightarrow$ on en déduit :

$$\boxed{x_1(t)=(x_0-d)\cos\omega_0t+d}$$

• La vitesse s'écrit $\dfrac{dx_1(t)}{dt}=-\omega_0(x_0-d)\sin\omega_0t$, et s'annule pour la 1ère fois en $\omega_0t_1=\pi$, d'où :

$$\boxed{x_{1m}=x_1(t_1)=2d-x_0}$$

• On revient ainsi aux conditions initiales où la vitesse est nulle $\Rightarrow$ le point M peut ensuite repartir ssi : $|x_{1m}| \succ d \Rightarrow |2d-x_0| \succ d \Rightarrow$ $\boxed{x_0 \succ 3d}$ (la solution $x_0 \prec d$ ne convient pas)

3) Durant la 2ème phase du mouvement, l'équation différentielle devient :

$$\frac{d^2x_2(t')}{dt^2}+\omega_0^2x_2(t')=-\omega_0^2d \qquad \text{avec : } t'=t-t_1$$

• En tenant compte des conditions initiales $x_2(t'=0)=x_{1m}=2d-x_0$ et de $\left.\dfrac{dx_2(t')}{dt'}\right|_{t'=0}=0$, on a :

$$\boxed{x_2(t')=(3d-x_0)\cos\omega_0t'-d}$$

MECANIQUE DU POINT MATERIEL

EXERCICE D' ORAL

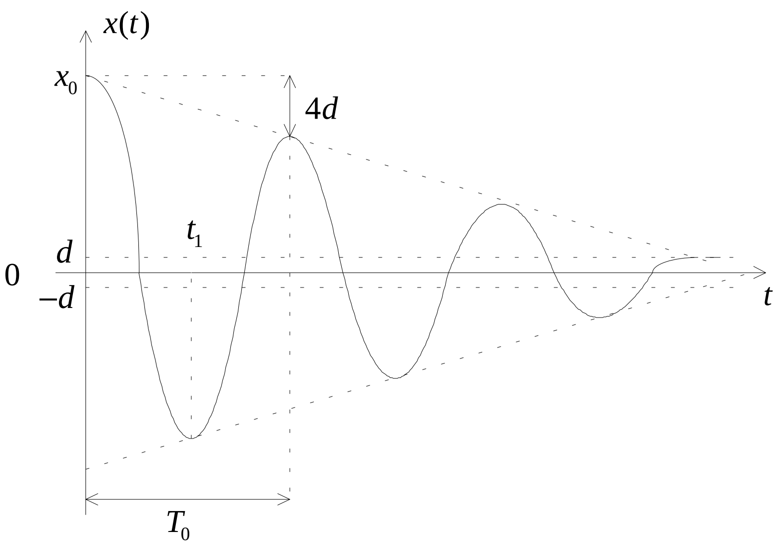
• Durant la 2ème phase (effectuée avec une vitesse positive et décroissante), le point M achève sa première pseudo-période lorsque sa vitesse s'annule, c'est-à-dire en t_2' tel que :

$$\left.\frac{dx_2(t')}{dt'}\right|_{t'=t_2'} = 0 = -\omega_0(3d - x_0)\sin\omega_0 t_2' \;\Rightarrow\; \omega_0 t_2' = \pi \;\Rightarrow\; \boxed{x_{2m} = x_2(t'=t_2') = x_0 - 4d}$$

• La pseudo-période est donc donnée par : $\boxed{T_0 = t_1 + t_2' = \dfrac{2\pi}{\omega_0}}$

• $\boxed{\text{L'amplitude diminue donc de } 4d \text{ par pseudo-période}}$

• On peut alors tracer la courbe :



Lorsque la vitesse du point M s' annule à l 'intérieur de la " bande " de largeur 2d, il ne repart plus.
La position finale n'est donc pas x=0: on comprend que le frottement solide joue un rôle important dans la **précision** d'un appareil de mesure par exemple.

4) Dans le cas présent, la pseudo-période est égale à la **période propre** de l'oscillateur non amorti (pour un frottement fluide, le lien est : $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$, où Q est le facteur de qualité).

• Par ailleurs, la décroissance de l'amplitude des oscillations est ici **linéaire**, alors qu'elle est exponentielle dans le cas du frottement fluide.